*Вестник Донского государственного технического университета. ISSN 1992-5980 eISSN 1992-6006. 2018. Т. 18, № 1, с. 85–91*
*Vestnik of Don State Technical University. ISSN 1992-5980 eISSN 1992-6006 2018. Vol. 18, no. 1, pp. 85–91*






УДК 519.6 10.23947/1992-5980-2018-18-1-85-91

# Чувствительность функционала эффективности процесса биологической очистки сточных вод к параметрам модели динамики концентраций биогенов*

**Е. С. Жменя[1], Н. С. Бузало[2**]**
[1,2] Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова, г. Новочеркасск, Российская Федерация

# Sensitivity of biological sewage disposal efficiency functional to parameters of biogen concentration dynamics model***

**E. S. Zhmenya[1], N. S. Buzalo[2**]**
[1,2] Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russian Federation

*Введение.* Статья посвящена вопросу анализа чувствительности функционала качества воды к параметрам модели искусственной водной экосистемы биологической очистки сточных вод, сформулированной в виде начально-краевой задачи для системы уравнений реакции-конвекции-диффузии, описывающей динамику биогенов. Использование многомерных нестационарных моделей водных экосистем с подробным описанием биохимических реакций осложняется большим числом параметров, значение которых необходимо получать экспериментально. Для упрощения процесса обеспечения данных была исследована чувствительность функционала качества очистки к параметрам модели.

*Материалы и методы.* В работе проведён краткий обзор существующих методов оценки, на основе методов теории малых возмущений и сопряжённых уравнений сформулирован алгоритм исследования чувствительности функционала, характеризующего качество воды, к параметрам модели водной экосистемы.

*Результаты исследования.* Получен алгоритм исследования чувствительности функционала к параметрам модели водной экосистемы. Приведён практический пример применения рассмотренного метода для задачи оптимального управления аэротенком-вытеснителем — элементом очистного сооружения для биологической очистки сточных вод.

*Обсуждение и заключения.* На основе проведённого анализа выявлены наиболее и наименее значимые параметры математической модели искусственной водной экосистемы аэротенка-вытеснителя, являющейся составной частью задачи оптимального управления аэрацией. Применение разработанного алгоритма оценки чувствительности возможно и для других процессов, связанных с массоперено-

*Introduction.* The analysis of the water quality functional sensitivity to the parameters of the multiparametric model of the artificial water ecosystem of the biological sewage treatment, which is formulated as an initial-boundary value problem for the system of reaction-convection-diffusion equations describing the biogen dynamics, is discussed. The use of the multidimensional non-stationary models of aquatic ecosystems with a detailed description of biochemical reactions is complicated by a large number of parameters, the importance of which must be obtained experimentally. To simplify the providing data process, the sensitivity of the water quality functional to the model parameters is evaluated.

*Materials and Methods.* A brief review of the existing estimation techniques is carried out. And further on, an algorithm for studying the functional sensitivity characterizing the water quality to the parameters of the water ecosystem model is formulated using methods of the theory of small perturbations and conjugate equations.

*Research Results.* The analysis algorithm of the functional sensitivity to the parameters of the aquatic ecosystem model is obtained. A practical example of the method application for the optimal control problem for an aeration tank (an element of the sewage treatment plant for the biological sewage treatment) is considered.

*Discussion and Conclusions.* On the basis of the analysis, the most and the least significant parameters of the mathematical model of the artificial aquatic ecosystem of the aeration tank, which is included as an integral part of the problem of optimal aeration control, are revealed. The sensitivity estimation algorithm given in the paper can be applied to other processes related to the mass transfer of reacting substances, such as the

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
** E-mail: evasjane@gmail.com, buzalo.n.s@mail.ru
*** The research is done within the frame of the independent R&D.

сом реагирующих веществ, таких как решение обратных источниковых задач динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере, моделирование биологических процессов в живых организмах, управление процессами массопереноса в аппаратах химических технологий и т. д.

solution to inverse source problems of dynamics and kinetics of gaseous impurities and aerosols in the atmosphere, modeling of biological processes in living organisms, control of the mass transfer in devices of the chemical technologies, and others.

**Ключевые слова:** анализ чувствительности, многопараметрическая модель, теория малых возмущений, сопряжённые уравнения, экосистема, очистка сточных вод, оптимизационная модель, управление экологическими системами, аэротенк-вытеснитель, функционал.

**Keywords:** sensitivity analysis, multiparametric model, small-perturbation theory, adjoint equations, ecosystem, sewage disposal, optimization model, management of ecosystems, aerotank-displacer, functional.

***Образец для цитирования:*** Жменя, Е. С. Чувствительность функционала эффективности процесса биологической очистки сточных вод к параметрам модели динамики концентраций биогенов / Е. С. Жменя, Н. С. Бузало // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2018. — Т. 18, № 1. — С. 85−91.

***For citation:*** E.S. Zhmenya, N.S. Buzalo. Sensitivity of biological sewage disposal efficiency functional to parameters of biogen concentration dynamics model. Vestnik of DSTU, 2018, vol. 18, no.1, pp. 85−91.

**Введение.** Рассматривается задача оптимального управления процессом биологической очистки сточных вод на основе математической модели, описывающей динамику концентраций биогенов в очистном сооружении. При решении задач управления экологическими системами на основе сложных многомерных и нестационарных моделей с подробным описанием биохимических реакций возникают сложности, связанные с большим числом параметров, значение которых необходимо получать экспериментально [1]. Для упрощения процесса обеспечения входных данных многопараметрической модели авторами исследуется чувствительность выбранной значимой скалярной характеристики (функционала качества очистки сточных вод, формирующего ограничение на переменную состояния в задаче оптимального управления) к параметрам модели. Путём этого исследования параметры можно разделить на наиболее значимые, для определения которых рекомендовано проведение натурных экспериментов, и наименее значимые, значения которых могут быть взяты приближённо.

Наиболее простым способом оценки чувствительности функционала к изменениям параметров многопараметрической модели является метод стохастического анализа (как линейного, так и нелинейного) [2–4]. Кроме этого, возможно применить метод, основанный на теории малых возмущений и сопряжённых уравнений [2, 5–7]. С вычислительной точки зрения этот алгоритм имеет преимущества по сравнению с прямыми методами, так как вместо многократного решения уравнений для множества параметров модели при расчёте компонентов градиента функционала предполагается одноразовое решение прямой и сопряжённой задач и вычисление интегралов, характеризующих оценку влияния изменения параметров к функционалу.

Данный подход реализован авторами в настоящей работе. Применение алгоритма оценки чувствительности, сформулированного ниже, возможно для любых процессов, связанных с массопереносом реагирующих веществ, таких как решение обратных источниковых задач динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере, моделирование биологических процессов в живых организмах, управление процессами массопереноса в аппаратах химических технологий и т. д. Возможно применять данный подход и для других классов задач.

**Описание метода и алгоритма.** Рассматривается задача, описывающая распространение и массоперенос неконсервативных примесей, представляющая собой краевую задачу для полулинейной системы уравнений реакции-конвекции-диффузии:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + div\left(\bar{u} \cdot S\right) - \Delta S = Q\left(S, \lambda\right), \qquad (1)$$

где $S$ — вектор концентраций примесей, $S = \{S_i\}$, $i = \overline{1, M}$; $Q\left(S, \lambda\right)$ — вектор-функция, описывающая источники и реакции между примесями; $\bar{u}$ — вектор скорости течения среды; $\lambda$ — вектор параметров $\lambda = \{\lambda^l\}$, $l = \overline{1, L}$, где $L$ — число параметров; $\Delta$ — оператор диффузионного переноса: $\Delta ... = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(k + k_{x_i}\right)\frac{\partial ...}{\partial x_i}\right)$, где

$(x_1,x_2,x_3)\leftrightarrow(x,y,z)$ — пространственные координаты, $k+k_{x_i}$ — сумма коэффициентов молекулярной и турбулентной диффузии (в направлении $x_i$ ) соответственно.

Пусть имеется некоторый интересующий нас функционал:

$$J=\langle p,S\rangle,$$

где знак ⟨ , ⟩ обозначает скалярное произведение в области T×Ω (T: $\{t\in[t_0, T]\}$, Ω — пространственная расчётная область), т. е. $\langle r,h\rangle=\int\limits_{T\times\Omega} r(x)h(x)d\Omega dt$ , здесь $r$(x), $h$(x) — некоторые произвольные функции, заданные в области $T$×Ω; $p=\{p_i\}$ — вектор функция, $i$-й элемент которой равен 1 в значимых по веществу $i$ зонах $\Omega_i$ и равен 0 в остальной области, т. е.:

$$p_i(x)=\begin{cases}1 & при\ \ x\in\Omega_i\times T,\\ 0 & при\ \ x\notin\Omega_i\times T.\end{cases} \tag{2}$$

Вдали от точек бифуркации решения системы (1) малые изменения параметров порождают возмущённую задачу, решение которой можно представить в виде ряда:

$$S(t,\lambda)=S\left(t,\bar{\bar\lambda}\right)+\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial S\left(t,\bar{\bar\lambda}\right)}{\partial\lambda^{(l)}}\delta\lambda^{(l)},$$

где $\partial\lambda^{(l)}$ — вариации параметров, $\partial\lambda=\bar{\bar\lambda}-\lambda=\{\partial\lambda^{(l)}\}$.

Функция чувствительности по $l$-му параметру $\dfrac{\partial S\left(t,\bar{\bar\lambda}\right)}{\partial\lambda^{(l)}}$, является решением системы уравнений модели (1), линеаризованной относительно невозмущённой траектории $\bar{\bar S}\equiv S\left(t,\bar{\bar\lambda}\right)$:

$$A\left(S\left(t,\bar{\bar\lambda}\right),\bar{\bar\lambda}\right)\frac{\partial S\left(t,\bar{\bar\lambda}\right)}{\partial\lambda^{(l)}}=\frac{\partial Q}{\partial\lambda^{(l)}}. \tag{3}$$

Оператор

$$A={\partial}/{\partial t}+div-\Delta-\left[{\partial Q}/{\partial S}\right]$$

задаёт систему уравнений линейного приближения, где запись $[\cdot]$ обозначает матрицы частных производных правой части системы. Первая вариация функционала определяется по формуле:

$$\delta J_l=\langle\delta S,p\rangle=\langle\omega,\delta Q\rangle,\ l=\overline{1,L}, \tag{4}$$

где ω — решение задачи с оператором $A^*$, сопряжённым к $A$.

Определение вариации функционала (4) в рамках прямого подхода предполагает расчёт функций чувствительности, а для многопараметрической модели — многократное решение начальной задачи для системы уравнений (3). Использование решения сопряжённой задачи $A^*$ позволяет вместо многократного решения уравнений линейного приближения для множества параметров основной задачи при расчёте компонентов градиента функционала $J$ реализовать подход, который предполагает одноразовое решение прямой и сопряжённой задачи и нахождения скалярного произведения:

$$\frac{\partial J}{\partial\lambda_l}=\left\langle\omega,\frac{\partial Q}{\partial\lambda^{(l)}}\right\rangle,\ l=\overline{1,L}. \tag{5}$$

Алгоритм оценки чувствительности функционала к изменениям параметров моделей при помощи теории малых возмущений и сопряжённых уравнений предполагает выполнение следующих этапов:

1. линеаризация полулинейной системы уравнений реакции-конвекции-диффузии (1);
2. формулировка задачи, сопряжённой к линеаризованной;
3. нахождение решения прямых и сопряжённых задач;
4. вычисление скалярного произведения (5) для каждого параметра $\lambda^l$, $l=\overline{1,L}$;
5. оценка полученных компонент градиента функционала. Чем больше соответствующая компонента, тем большее влияние оказывает изменение параметра $\lambda^l$ на функционал.

**Постановка задачи управления биологической очисткой сточных вод и результаты численных экспериментов.** Определим влияние вариации различных параметров модели экосистемы аэротенка-вытеснителя на функционал, характеризующий эффективность процесса очистки сточных вод от загрязняющих веществ. Под аэротенком-вытеснителем здесь понимается элемент очистного сооружения, в котором воды, загрязнённые аммонийным азотом (*N*), являющимся наиболее опасным для организма человека веществом, смешиваются с активным илом (*A*), а также аэрируются кислородом (*OX*), необходимым для протекания биохимических реакций. В ходе прохождения «смеси» по аэротенку происходит очищение сточных вод от загрязняющего вещества в процессе наращивания биомассы активного ила [8, 9]. Схема аэротенка-вытеснителя изображена на рис. 1.

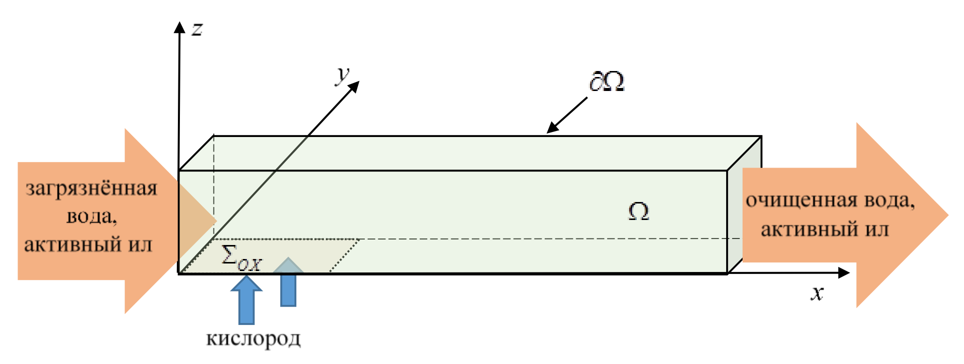



Рис. 1. Схема аэротенка-вытеснителя

*Fig. 1. Scheme of aeration tank*

Сформулируем задачу оптимального управления аэрацией элемента очистного сооружения.

Управлением является мощность источника кислорода $F_{OX}(t)$. Функция цели задачи обеспечивает минимизацию затрат на поступление кислорода в водную систему аэротенка-вытеснителя в течении периода времени T:

$$\int_{t_0}^{T} \xi_t F_{OX}(t)\,dt \to \min ,$$

где $\xi_t$ — затраты, необходимые для подачи кислорода объёмом $F_{OX}(t)$ на единицу площади источника в момент времени $t = \overline{t_0, T}$.

Переменными состояния задачи являются концентрации *N*, *A* и *OX*: $S_N$, $S_A$, $S_{OX}$. Оптимизационная модель включает в себя следующее ограничение на переменную состояния:

$$\left(p_N(x), S_N - S_{N,PDK}\right) \le 0,\ x \in \Omega, \tag{6}$$

где $S_{N,PDK}$ — предельно допустимая концентрация аммонийного азота; $p_N(x)$ — функция типа (2), характеризующая значимую область (соответствует зонам водозабора из сооружения).

Управление удовлетворяет ограничению на знак:

$$F_{OX}(t) \ge 0,\ t = \overline{t_0, T}.$$

Решение задачи оптимизации должно удовлетворять краевой задаче, описывающей массоперенос и трансформацию неконсервативных примесей (уравнениям состояния):

$$\frac{\partial S_A}{\partial t} + div\left(\bar{u} \cdot S_A\right) - \Delta S_A = \frac{\mu_m S_N}{K_N + S_N + \frac{S_N^2}{K_N^{in}}} \cdot \frac{S_{OX}}{K_{OX} + S_{OX}} S_A - \tag{7}$$
$$-\phi_A S_A^2 - l_A S_A, \qquad t = \overline{t_0, T}, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial S_N}{\partial t} + div\left(\bar{u} \cdot S_N\right) - \Delta S_N = \delta_N^A S_A - \frac{\mu_m S_N}{K_N + S_N + \frac{S_N^2}{K_N^{in}}} S_A,\ t = \overline{t_0, T}, \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$\frac{\partial S_{OX}}{\partial t} + div\left(\bar{u} \cdot S_{OX}\right) - \Delta S_{OX} = -\frac{\mu_m S_{OX}}{K_{OX} + S_{OX}} S_A,\ t = \overline{t_0, T}, \quad x \in \Omega; \tag{9}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial N} = 0,\ i = \{A, N, OX\},\ x \in \partial\Omega,\ t = \overline{t_0, T},\ x \notin \Sigma_{OX}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial S_{OX}}{\partial N} = S^{\Sigma_{OX}} = k_{OX} F_{OX}(t), \quad t = \overline{t_0, T}, \quad x \in \Sigma_{OX}; \tag{11}$$

$$S_i = S_i^0, \quad i = \{A, N, OX\}, \quad x \in \Omega, \quad t = t_0. \tag{12}$$

В вышеприведенных уравнениях $\mu_m$ — максимальная скорость роста активного ила; $K_i$, $i = \{A, N, OX\}$ — константы полунасыщения; $K_i^{in}$, $i = \{A, N, OX\}$ — константы ингибирования роста активного ила; $\phi_A$ — коэффициент внутривидовой конкуренции; $l_A$ — скорость отмирания; $\delta_N^A$ — скорость выделения аммонийного азота в процессе жизнедеятельности активного ила; $k_{OX}$ — коэффициент, равный отношению скорости растворения кислорода к коэффициенту диффузии в направлении нормали *N*. Задача состоит в оценке чувствительности функционала из ограничения (6) к параметрам модели.

Для реализации изложенного выше алгоритма необходимо сформулировать задачу нахождения вектора $\omega(t) \equiv \left(S_A^*(t), S_N^*(t), S_{OX}^*(t)\right)^T$, то есть сопряжённую к краевой задаче [10], являющейся линейным приближением к задаче (7)–(12).

Сопряжённая задача имеет вид:

$$-\frac{\partial S_A^*}{\partial t} - div\, S_A^* + \Delta S_A^* - \left( \frac{\mu_m \overline{S_N}}{K_N + \overline{S_N} + \frac{\overline{S_N}^2}{K_N^{in}}} \frac{\overline{S_{OX}}}{K_{OX} + \overline{S_{OX}}} - 2\phi_A \overline{S_A} - l_A \right) S_A^* - \left( \delta_N^A - \frac{\mu_m \overline{S_N}}{K_N + \overline{S_N} + \frac{\overline{S_N}^2}{K_N^{in}}} \right) S_N^* + \left( \frac{\mu_m \overline{S_{OX}}}{K_{OX} + \overline{S_{OX}}} \right) S_{OX}^* = 0, \tag{13}$$

$$-\frac{\partial S_N^*}{\partial t} - div\, S_N^* + \Delta S_N^* - \left( \frac{\mu_m \overline{S_{OX}}\,\overline{S_A}}{\left(K_N + \overline{S_N} + \frac{\overline{S_N}^2}{K_N^{in}}\right)\left(K_{OX} + \overline{S_{OX}}\right)} - \frac{\mu_m \overline{S_N}\,\overline{S_{OX}}\,\overline{S_A}\left(1 + \frac{2\overline{S_N}}{K_N^{in}}\right)}{\left(K_N + \overline{S_N} + \frac{\overline{S_N}^2}{K_N^{in}}\right)^2 \left(K_{OX} + \overline{S_{OX}}\right)} \right) S_A^* - \left( \frac{\mu_m \overline{S_A}}{K_N + \overline{S_N} + \frac{\overline{S_N}^2}{K_N^{in}}} + \frac{\mu_m \overline{S_N}\,\overline{S_A}\left(1 + \frac{2\overline{S_N}}{K_N^{in}}\right)}{\left(K_N + \overline{S_N} + \frac{\overline{S_N}^2}{K_N^{in}}\right)^2} \right) S_N^* = p_N, \tag{14}$$

$$-\frac{\partial S_{OX}^*}{\partial t} - div\, S_{OX}^* + \Delta S_{OX}^* - \left( \frac{\mu_m \overline{S_N}\,\overline{S_A}}{\left(K_N + \overline{S_N} + \frac{\overline{S_N}^2}{K_N^{in}}\right)\left(K_{OX} + \overline{S_{OX}}\right)} - \frac{\mu_m \overline{S_N}\,\overline{S_{OX}}\,\overline{S_A}}{\left(K_N + \overline{S_N} + \frac{\overline{S_N}^2}{K_N^{in}}\right)\left(K_{OX} + \overline{S_{OX}}\right)^2} \right) S_A^* - \left( -\frac{\mu_m \overline{S_A}}{\left(K_{OX} + \overline{S_{OX}}\right)} + \frac{\mu_m \overline{S_{OX}}\,\overline{S_A}}{\left(K_{OX} + \overline{S_{OX}}\right)^2} \right) S_{OX}^* = 0; \tag{15}$$

$$\overline{u_N} S_i^* + \frac{\partial S_i^*}{\partial N} = 0,\ i = \{A, N, OX\},\ \ x \in \partial\Omega,\ \ t = \overline{t_0, T},\ \ \ x \notin \Sigma_{OX}; \qquad (16)$$

$$S_i^* = 0,\ i = \{A, N, OX\},\ x \in \Omega,\ t = t_0. \qquad (17)$$

В системе (13)–(17) $\overline{S_i}$, $i = \{A, N, OX\}$ — среднее значение концентрации, полученное при решении системы (7)–(12) с невозмущёнными параметрами.

Далее определим чувствительность функционала из ограничения (6) к изменениям следующих параметров $\lambda_l$ : $K_i$, $i = \{N, OX\}$; $K_i^{in}$; $\delta_N^A$; $l_A$; $\phi_A$; $\mu_m$. Результаты вычисления скалярных произведений (5) сведены в таблицу 1.

Таблица 1
*Table 1*

Чувствительность функционала эффективности процесса биологической очистки

*Efficiency functional sensitivity of biological purification*

| Коэффициенты | $\partial J / \partial\lambda_l$, $l = \overline{1,7}$ | Коэффициенты | $\partial J / \partial\lambda_l$, $l = \overline{1,7}$ |
|---|---|---|---|
| $K_{OX}$ | 1,75 | $l_A$ | -2,01 |
| $K_N$ | 0,96 | $\phi_A$ | -1,69 |
| $\mu_m$ | 0,87 | $\delta_N^A$ | -0,0001 |
| $K_N^{in}$ | 0,003 | | |

**Обсуждение и заключения.** Анализ чувствительности функционала показал, что параметры, характеризующие константу полунасыщения по кислороду ($K_{OX}$), константу полунасыщения по аммонийному азоту ($K_N$), максимальную скорость роста активного ила ($\mu_m$), скорость отмирания активного ила ($l_A$) и коэффициент внутривидовой конкуренции ($\phi_A$) оказывают наибольшее влияние на вариацию функционала эффективности очистки сточных вод и их значения следует определять экспериментально. В тоже время изменения параметров, характеризующих константу ингибирования роста активного ила ($K_N^{in}$) и скорость выделения аммонийного азота в процессе жизнедеятельности активного ила ($\delta_N^A$) практически не влияют на изменение функционала, характеризующего эффективность очистки сточных вод, и, следовательно, при расчетах можно использовать средние значения этих параметров.

**Библиографический список**

1. Пахт, Е. В. Неопределённость при моделировании экосистемы озера / Е. В. Пахт, А. И. Абакумов // Математическая биология и биоинформатика. — 2011. — Т. 6, № 1. — С. 102–114.

2. Марчук, Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты / Г. И. Марчук. — Москва : Наука, 1991. — 304 с.

3. Абрамов, В. И. Об одном методе нелинейного анализа чувствительности математических моделей / В. И. Абрамов, А. П. Карташев, А. С. Рошаль // Вычислительная математика и математическая физика. — 1986. — Т. 26, № 3. — С. 469–474.

4. Соболь, И. М. Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей / И. М. Соболь // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 1. — С. 112–118.

5. Бочаров, Г. А. Прикладные проблемы математического моделирования в иммунологии / Г. А. Бочаров, Г. И. Марчук // Вычислительная математика и математическая физика. — 2000. — Т. 40, № 12. — С. 1905–1920.

6. Управление моделями вирусных инфекций с запаздывающими переменными на основе оптимальных возмущений / Г. А. Бочаров [и др.] — Москва : Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017. — 28 с.

7. Марчук, Г. И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем / Г. И. Марчук. — Москва : Наука, 1992. — 336 с.

8. Воронов, Ю. В. Водоотведение и очистка сточных вод / Ю. В. Воронов, С. В. Яковлев. — Москва : изд-во ассоциации строительных вузов, 2006. — 704 с.

9. Жменя, Е. С. О математическом моделировании процессов удаления соединений азота и фосфора из водной среды / Е. С. Жменя, Н. С. Бузало // Новая наука: проблемы и перспективы. — 2016. — № 9–1. — С. 11–13.

10. Бочаров, Г. А. Математическое моделирование вирусных и бактериальных инфекций: дис. ... докт. физ.-матем. наук / Г. А. Бочаров. — Москва : ИВМ РАН, 1995. — 146 с.

**References**

1. Pakht, E.V., Abakumov, A.I. Neopredelennost' pri modelirovanii ekosistemy ozera. [Uncertainty at modeling of a lake's ecosystem.] Mathematical Biology and Bioinformatics, 2011, vol. 6, no. 1, pp. 102–114 (in Russian).
2. Marchuk, G.I. Matematicheskie modeli v immunologii. Vychislitel'nye metody i eksperimenty. [Mathematical models in immunology. Computational methods and experiments.] Moscow: Nauka, 1991, 304 p. (in Russian).
3. Abramov, V.I., Kartashov, A.P., Roshal, A.S. Ob odnom metode nelineynogo analiza chuvstvitel'nosti matematicheskikh modeley. [A method for the nonlinear analysis of the sensitivity of mathematical models.] Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1986, vol. 26, no. 3, pp. 469–474 (in Russian).
4. Sobol, I.M. Ob otsenke chuvstvitel'nosti nelineynykh matematicheskikh modeley. [On sensitivity estimation for nonlinear mathematical models.] Mathematical Models and Computer Simulations, 1990, vol. 2, no. 1, pp. 112–118 (in Russian).
5. Bocharov, G.A., Marchuk, G.I. Prikladnye problemy matematicheskogo modelirovaniya v immunologii. [Applied problems of mathematical modeling in immunology.] Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2000, vol. 40, no. 12, pp. 1905–1920 (in Russian).
6. Bocharov, G.A., Nechepurenko, Y.M., Khristichenko, M.Y., Grebennikov, D.S. Upravlenie modelyami virusnykh infektsiy s zapazdyvayushchimi peremennymi na osnove optimal'nykh vozmushcheniy. [Control of models of viral infections with delayed variables, based on optimal perturbations.] Moscow: Keldysh Institute Preprints, 2017, 28 p. (in Russian).
7. Marchuk, G.I. Sopryazhennye uravneniya i analiz slozhnykh sistem. [Conjugate equations and analysis of complex systems.] Moscow: Nauka, 1992, 336 p. (in Russian).
8. Voronov, Y.V., Yakovlev, S.V. Vodootvedenie i ochistka stochnykh vod. [Water removal and sewage purification.] Moscow: izd-vo ASV, 2006, 704 p. (in Russian).
9. Zhmenya, E.S., Buzalo. N.S. O matematicheskom modelirovanii protsessov udaleniya soedineniy azota i fosfora iz vodnoy sredy. [On mathematical modeling of phosphorus compounds and N-removal out of aquatic environment.] Novaya nauka: problemy i perspektivy, 2016, no. 9–1, pp. 11–13 (in Russian).
10. Bocharov, G.A. Matematicheskoe modelirovanie virusnykh i bakterial'nykh infektsiy: dis. ... dokt. fiz.-matem. Nauk. [Mathematical modeling of viral and bacterial infections: Dr.Sci. (Phys.-Math.), diss.] Moscow: IVM RAN, 1995, 146 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 25.09.2017
Сдана в редакцию 30.09.2017
Запланирована в номер 20.01.2018

Received 25.09.2017
Submitted 30.09.2017
Scheduled in the issue 20.01.2018

***Об авторах:***

**Жменя Евгения Сергеевна,**
ассистент кафедры «Прикладная математика» Южно-Российского государственного политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова (РФ, 346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132), кандидат технических наук,
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0046-3438,
evasjane@gmail.com

**Бузало Наталья Сергеевна,**
доцент кафедры «Прикладная математика» Южно-Российского государственного политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова (РФ, 346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132), кандидат технических наук, доцент,
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9151-395X,
buzalo.n.s@gmail.com

***Authors:***

**Zhmenya, Evgenia S.,**
teaching assistant of the Applied Mathematics Department, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI) (RF, 346428, Rostov Region, Novocherkassk, ul. Prosveshcheniya, 132), Cand.Sci. (Eng.),
ORCID http://orcid.org/0000-0003-0046-3438,
evasjane@gmail.com

**Buzalo, Natalia S.,**
associate professor of the Applied Mathematics Department, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI) (RF, 346428, Rostov Region, Novocherkassk, ul. Prosveshcheniya, 132), Cand.Sci. (Eng.), associate professor,
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9151-395X,
buzalo.n.s@gmail.com